COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

*5ème Séquence / Devoir surveillé*

| Tle C | ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES | Durée : 4H |
|---|---|---|

## EXERCICE 1 : 4 Points

On considère dans ℂ l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^5 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$
où a et b sont deux nombres réels

1- Démontrer que si $z_0$ est une solution de (E), $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont également des solutions de (E)

2- Déterminer a et b sachant que 1 + i est une solution de (E).
3- En déduire trois autres solutions de (E)
4- Achever la résolution de l'équation (E).

## EXERCICE 2 : 5 Points

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice unité I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $A^{2n} = 2^n \times I$
2- On considère les suites ($u_n$) et ($v_n$) définies comme suit : $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

a) Calculer $A^7$.
b) En déduire les expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de n.

3- E est un plan vectoriel dont une base est B$(\vec{i}, \vec{j})$ ; f une endomorphisme de F dont la matrice relative à la base B est A.

a. Démontrer que f est bijectif et déterminer la matrice de sa bijection réciproque $f^{-1}$ dans l a base B.
b. Soit $\alpha$ un nombre réel.
Montrer que s'il existe un vecteur non nul u tel que f(u) = $\alpha$u, alors $\alpha$ = 2 ou $\alpha$ = -2
c. Déterminer deux vecteurs non nuls $u_1$ et $u_2$ tels que $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = -2u_2$
d. Démontrer que $B^2 = (u_1, u_2)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

## EXERCICE 3 : 3 Points

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.

1. Soit k un entier naturel, $3 \leq k \leq n$. Déterminer la probabilité des événements suivants :
$A_k$ : « Les trois boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k »
$B_k$ : « Le plus grand numéro figurant sur les trois boules tirées est k ».
2. On place les n boules au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n : chaque boîte pouvant contenir toutes ces boules. On appelle $P_n$ la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   a. Démontrer que $P_n = \frac{n!}{n^n}$
   b. Soit x un nombre réel positif, démontrer que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
   c. En déduire que pour tout n, $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$
   d. Démontrer que la suite ($P_n$) est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 4 :** 8 Points

1. On considère les fonctions f définies de $]0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
   (1) : f est deux fois dérivables et $x^2f''(x) - 2f(x) = 0$ pour $x > 0$.
   a. Soit f une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ et la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$
      Montrer que f vérifie les conditions (1) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$
   b. Trouver toutes les fonction f de $]0 ; +\infty[$ qui vérifient les conditions (1)
   c. Trouver les fonctions f vérifiant les conditions (1) et qui se prolongent par continuité en 0

2. Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
   a. Calculer $I_0$ et $I_1$
   b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (2)
   c. En déduire $I_2$, $I_3$
   d. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}$
   e. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}$
   f. Démontrer que la suite $(I_n)$ est décroissante
   g. A l'aide de (2), établir que pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$
   h. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$
   i. Soit $W_n = \left( \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1}$ pour $n \geq 1$, démontrer que $\lim_{n \to +\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$