COLLEGE CHEVREUL
BP 4093 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

*Evaluation de fin de 1ère Séquence*

| Tle C | ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES | Durée : 3<br>Coefficient : 6 |
|---|---|---|

*L'épreuve comporte quatre exercices obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*

**EXERCICE 1** : /6,5 pts

1. Démontrer par récurrence que $4^n+6n-1$ est divisible par 9. (1 pt)
2. Prouver par récurrence qu'à partir d'un certain rang que l'on précisera, l'inégalité suivante : $3^n<n!$ (1 pt)
3. Calculer la limite de la suite suivante : $U_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$. (0,5 pt)
4. La suite $(U_n)$ est définie par : $U_0=a(a>0)$ et $U_{n+1}=\sqrt{U_n}$

a) Pour $a>1$ :

- démontrer que la suite $(U_n)$ est strictement décroissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel n : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|U_n-1|$ (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite $U_n$. (0,5 pt)

b) Pour a = 1 :

- Prouver que la suite $(U_n)$ est constante. (0,5 pt)
- Préciser sa limite. (0,5 pt)

c) Pour $0<a<1$ :

- Démontrer que la suite $(U_n)$ est strictement croissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel n $|1-U_{n+1}|\leq\frac{1}{1+a}|1-U_n|$ (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite $(U_n)$. (0,5 pt)

**EXERCICE 2** : /3,5 pts

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ ; $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

   a) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires. (0,5 pt)

   b) Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormale. (0,5 pt)

2. Soit trois vecteurs non coplanaires $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ; nous nous proposons de construire par la méthode d'Ehrard Schmidt une base orthonormale de l'espace.

   a) Soit $\vec{u}' = u$ et $\vec{v}'=k\vec{u}+\vec{v}$ où $k\in R$. Déterminer k pour que les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ soient orthogonaux. (0,5 pt)

   b) Soit $\vec{w}'=a\vec{u}'+b\vec{v}'+\vec{w}$ où $a\in R$ et $b\in R$. Déterminer a et b pour que $\vec{w}'$ soit orthogonal à $\vec{u}'$ et à $\vec{v}'$. La base $(\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}')$ est donc orthogonale. (1 pt)

   c) Soit $\vec{u}(2;-1;-2)$ ; $\vec{v}(1;-1;1)$ et $\vec{w}(2;1;-3)$. Calculer $\vec{u}',\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ en choisissant les vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}',\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ en déduire une base orthonormale de l'espace. (1 pt)

**PROBLEME** : /10 pts

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A.1. On prend pour point $M_0$ l'origine O du repère ; soit alors $M_1$ le point du plan P tel que $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{i}$. On fixe un nombre réel r > 0 et un nombre réel $\theta$ dans $R-\{k\pi, k\in Z\}$. Soit $M_2$ le point du plan P tel que $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=r\|\overrightarrow{M_0M_1}\|$ et $(\overrightarrow{M_0M_1};\overrightarrow{M_1M_2})=\theta$. Calculer l'affixe $V_0$ du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe $V_1$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. (1 pt)

2.- Les points $M_0$, $M_1$, $M_2$ ayant été définis ci-dessous pour tout $n\geq 1$ dans N on défini le point $M_{n+1}$ à partir des points $M_{n-1}$ et $M_n$ par $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|=r\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$ et $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n};\overrightarrow{M_nM_{n+1}})=\theta$. On obtient ainsi une suite de points $M_0$, $M_1$, $M_2$ …. $M_n$ et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1]$ ; $[M_1M_2]$ …… $[M_nM_{n+1}]$ … est appelé « polygone »

a) Montrer que $\forall n\geq 1$ $V_n=re^{i\theta}V_{n-1}$. (1,5 pt)

b) Déduisez-en pour tout entier naturel $n\geq 0$ l'expression de $V_n$ en fonction de n, r et $\theta$. (1 pt)

c) Dans cette question on suppose $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$. Calculez $V_n$ pour $0\leq n\leq 3$ et placez les points $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ en prenant 8 cm comme unité de longueur. (1pt x 2)

B.- Dans toute la suite du problème on propose $0<r<1$ et pour tout $n\geq 0$ on note $Z_n$ l'affixe du point $M_n$.

1. Calculez $Z_0$ ; $Z_1$ et $Z_2$. (0,5pt x 3)
2. Pour tout $n\geq 0$, exprimez $V_n$ en fonction de $Z_n$ et $Z_{n+1}$ ; déduisez-en que pour tout $n\geq 1$ ; $Z_n=V_0+V_1+....+V_{n-1}$. (0,5pt x é)
3. On rappelle que pour tout nombre complexe $Z\neq 1$ :

$1+Z+Z^2+....+Z^{n-1}=\frac{1-Z^n}{1-Z}$. Calculez pour tout $n\geq 0$ $Z_n$ en fonction de n, r et $\theta$. (0,5 pt)

4.a) Démontrez que le module du nombre complexe $Z_n-\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

b) On note $\Omega$ le point du plan P d'affixe $w=\frac{1}{1-re^{i\theta}}$. Interprétez géométriquement le résultat de la question a). (1 pt)