COLLEGE JEAN TABI
Département de Mathématiques
BP 4174 – Tel./Fax : 221.60.53
e-mail :jeantabi@camnet.cm
YAOUNDE

CLASSE : Tle D

DUREE : 4 H
CEOF. : 4

EXAMEN BLANC FEVRIER 2003 : EPREUVE DE MATNEMATIQUES.

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées 1 et 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

EXERCICE 1 :3.5points

I – Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

xi	5	7	10	14	18	22	26
yi	6,1	3,7	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1) Trouver une équation de la droite de régression de y en x. 1.5pt
2) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance. 0.25pt

II – Des études statistiques montrent que, lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 51%.
Dans une famille de 4 enfants sans jumeaux, on suppose que les fécondations sont indépendantes.
1) Calculer la probabilité pour que cette famille ait au tant de filles que de garçons. 0.5pt
2) Quelle est la probabilité pour que dans cette famille, il y ait au plus 3 garçons ? 1.25pt

EXERCICE 2 : 5.5points

1 – a) Vérifier que $z^4+4=\left(z^2+2\right)^2-4z^2$. 0.25pt

b) Déduire une factorisation de $P(Z)=Z^4+2Z^2+4$ puis la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$. 2pts

2 – On donne les nombres complexes

$$Z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\quad,\quad Z_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2},\ Z_3=\left[\sqrt{2},4\frac{\Pi}{3}\right]\text{ et } Z_4=\left[\sqrt{2},\frac{5\Pi}{3}\right].$$

a) Donner la forme trigonométrique de Z_1 et de Z_2. 0.5pt
b) Ecrire Z_3 et Z_4 sous forme algébrique. 0.5pt
c) Construire dans un repère orthonormé les points A, B, C et D d'affixes respectives Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4. 1pt

3 – Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $Z'=\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}\right)z+\frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$. 1.25pt

PROBLEME : 11 points.

la fonction f est définie sur [0 ; +∞[par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}\ si\quad x>0\end{cases}$

I – Etude d'une fonction auxiliaire.

La fonction h est définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = 1 + x + \ln x$.
1) Etudier les variations de h 0.75pt
2) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique β. 0.5pt
3) Vérifier que $0,27 < \beta < 0,28$. 0.5pt

$1+x+\ln x=0$

II – Etude de la fonction f.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 0.75pt

2) a – Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ 0.5pt

b – Vérifier que $f(\beta) = -\beta$ 0.25pt

c – En déduire les variations de f. 0.75pt

3) Tracer la courbe de f. (On placera les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12 et on prendra $\ln 0{,}27 = -1{,}31$; $\ln 0{,}28 = -1{,}27$; $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 3 = 1{,}1$ et $\ln 5 = 1{,}6$) 1pt

III – Existence d'un point fixe de la fonction g .

La fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

Un point fixe de g est un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

1) Démontrer que f est une bijection de l'intervalle $I = [3\,;4]$ vers un intervalle qui contient 1 qu'on déterminera. 0.75pt

2) Montrer que les équations $f(x) = 1$ et $g(x) = x$ sont équivalentes. 0.25pt

3) En déduire que g admet un unique point fixe α dans I. 0.25pt

IV – Valeur approchée de α.

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$

1) a – Dresser le tableau de variations de g. 1.5pt

b – Démontrer que $g(I) \subset I$ 0.5pt

c – Démontrer que pour tout x de I, on a : $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

(On prendra $e^{\frac{4}{3}} = 3{,}8$ et $e^{\frac{5}{4}} = 3{,}49$) 0.5pt

2) a – Montrer pour tout naturel n que :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$$ 0.75pt

b – En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$ 0.5pt

c – Montrer que (U_n) a pour limite α. 0.25pt

3 -) a – Trouvez le plus petit des entiers naturels n tels que $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$ 0.5pt

b – Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. 0.25pt

Prof. René ELLA ONDO