I Équation du premier degré dans $\mathbb{C}$

I.1 Définition

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $aZ + b = 0$.
Avec ($a \in$ $\mathbb{C^*}$)

I.2 Résolution des équations du premier degré dans $\mathbb{C}$
L'ensemble solution de l'équation $aZ + b = 0$ est :
$S = \left\{ { - \frac{b}{a}} \right\}$

II Racines carrées d'un nombre complexe

II.1 Définition :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que $Z = {z^2}$.

II.2 Résolution du cas général :

Si $Z = a + ib$ et $z = x + iy$, On dit que z est une racine carrée de Z si et seulement si

$\left\{ \begin{array}{l}Z = {z^2}\\\left| Z \right| = \left| {{z^2}} \right|\end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} {\left({x + iy} \right)^2} = a + ib\\{x^2} + {y^2} = \left| Z \right| \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l}{x^2} - {y^2} = a\\2xy = b\\{x^2} + {y^2} = \left| Z \right| \end{array} \right.$

• Partie réelle de ${z^2}$ égale à la partie réelle Z
• Partie imaginaire de ${z^2}$ égale à la partie imaginaire Z
• Module de ${z^2}$ égale au module de Z
Ainsi :

$\left\{ \begin{array}{l}{x^2} = \frac{1}{2}\left({\left| Z \right| + a} \right)\\{y^2} = \frac{1}{2}\left({\left| Z \right| - a} \right)\end{array} \right.$

$2xy = b$ indique si x et y sont de mêmes signes ou de signes contraires suivant le signe de b
• Si $xy \succ 0$, x et y sont de mêmes signes
• Si $xy \prec 0$, x et y sont de signes contraires

Autre méthode pratique

Soit $Z = a + ib$, l'écriture algébrique d'un nombre complexe.
Si $\frac{b}{2}$ est un entier relatif tel que $\frac{b}{2} = xy$ avec ${x^2} - {y^2} = a$
Alors les racines carrées de Z sont :
$\left\{ \begin{array}{l}{z_1} = x + iy\\{z_2} = - x - iy\end{array} \right.$

Exemple : Déterminer les racines carrées de $Z = 5 - 12i$
$\frac{b}{2} =$ $- 6 = - 2 \times 3$
${\left(3 \right)^2} - {\left({ - 2} \right)^2}$ $= 5 = a$

$\left\{ \begin{array}{l}{z_1} = - 3 + 2i\\{z_2} = 3 - 2i\end{array} \right.$

III Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

III.1 Définition

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme : $a{Z^2} + bZ$ $+ c = 0$ avec $a \ne 0$

La résolution de telles équations nécessite d'abord le calcul du discriminant associé Δ qui est tel que tel que : $\Delta = {b^2} - 4ac$

• Si $\Delta \succ 0$, on a : ${Z_1} = \frac{{ - b - \sqrt \Delta }}{{2a}}$ et ${Z_2} = \frac{{ - b + \sqrt \Delta }}{{2a}}$;

• Si $\Delta = 0$, ${Z_1} = {Z_2}$ $= \frac{{ - b}}{{2a}}$

Si $\Delta \prec 0$, ${Z_1} =$ $\frac{{ - b - i\sqrt \Delta }}{{2a}}$ et ${Z_2} =$ $\frac{{ - b + i\sqrt \Delta }}{{2a}}$;

• Si $\Delta = a' + ib'$ (forme algebrique), on a ${Z_1} = \frac{{ - b + {\delta _1}}}{{2a}}$ et ${Z_2} = \frac{{ - b + {\delta _2}}}{{2a}}$ avec ${{\delta _1}}$ et ${{\delta _2}}$ les racines carrées de Δ.

IV Équations se ramenant au second degré :

IV.1 Définition :

Ceux sont des équations dont le degré est supérieur à 2

Exemples : $a{Z^3} + b{Z^2}$ $+ cZ + d = 0$

$a{Z^4} + b{Z^3}$ $+ c{Z^2} + dZ$ $+ e = 0$

IV.2 Résolution

La résolution de telles équations nécessite obligatoirement la reconnaissance d'une racine évidente : réelle(${Z_0} = a$) ou imaginaire (${Z_0} = ib$) ou encore ${Z_0} = a + ib$ (avec $a \ne 0$ et $b \ne 0$) afin de factorisée puis de résoudre l’équation en utilisant l’une des techniques de factorisation qui suivent :

• Division Euclidienne ;

• Tableau d’Hörner ;

• L’identification des coefficients.

NB : Pour les équations bicarrées : ($a{Z^4} + b{Z^2}$ $+ c = 0$), il suffit de ramener l'équation bicarrée au second degré en posant : ${Z^2} = z$ $\Rightarrow a{z^2} + bz$ $+ c = 0$, Avec $a \ne 0$.

V Racines nièmes d'un nombre complexe

V.1 Définition

On appelle racine nième de Z tout nombre complexe z tel que : ${z^n} = Z$. avec $n \in$ $\mathbb{N}$

V.2 Résolution

Soit $Z = a + ib$ un complexe de forme polaire : $\left[{r,\theta } \right]$ et $z = a' + ib'$ un complexe de forme polaire $\left[{r',\theta '} \right]$

${z^n} = Z \Leftrightarrow $ ${\left[{r',\theta '} \right]^n} = $ $\left[{{{\left({r'} \right)}^n},n\theta '} \right]$ $ = \left[{r,\theta } \right]$

Par identification

$\left\{ \begin{array}{l}r' = \sqrt[n]{r}\\\theta ' = \frac{\theta }{n}\left[{\frac{{2k\pi }}{n}} \right] \end{array} \right.$ avec $k \in \left[{0;n - 1} \right]$

${z_k} = $ $\left[{\sqrt[n]{{\left| Z \right|}};\frac{{\theta + 2k\pi }}{n}} \right]$

Sous sa forme exponentielle, la racine cubique est donnée par : ${z_k} = \sqrt[n]{{\left| Z \right|}}$ ${e^{i\left({\frac{\theta }{n} + 2k\frac{\pi }{n}} \right)}}$