SESSION 2008

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE MP

I Permanents

Tout d'abord, notons que l'on a aussi

$$\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(n)n}.$$

En effet, pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, posons $j_1=\sigma(1)$,..., $j_n=\sigma(n)$ de sorte que $1=\sigma^{-1}(j_1)$,..., $n=\sigma^{-1}(j_n)$. On réordonne alors le produit $m_{1\sigma(1)}\dots m_{n\sigma(n)}$ dans l'ordre croissant des numéros de colonnes et on obtient

$$m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(n)n}=m_{\sigma^{-1}(j_1)j_1}\dots m_{\sigma^{-1}(j_n)j_n}=m_{\sigma^{-1}(1)1}\dots m_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Maintenant, l'application $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et donc

$$\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} m_{1\sigma(1)}\dots m_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} m_{\sigma^{-1}(1)1}\dots m_{\sigma^{-1}(n)n}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(n)n}.$$

1. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a $|m_{\sigma(i)j}|=\sqrt{m^2_{\sigma(i)j}}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n m^2_{kj}}=\|m_j\|$ et donc

$$|m_{\sigma(1)1}m_{\sigma(2)2}\dots m_{\sigma(n)n}|\leq\|m_1\|\|m_2\|\dots\|m_n\|,$$

puis

$$\begin{aligned}|\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)|&\leq\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|m_{\sigma(1)1}m_{\sigma(2)2}\dots m_{\sigma(n)n}|\\&\leq\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\|m_1\|\|m_2\|\dots\|m_n\|=\|m_1\|\|m_2\|\dots\|m_n\|\times\mathrm{card}(\mathfrak{S}_n)=n!\prod_{j=1}^n\|m_j\|.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(m_1,\dots,m_n)\in(\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n,\ |\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)|\leq n!\prod_{j=1}^n\|m_j\|.}$$

2. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Avec la convention $m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(j-1)j-1}=1$ si $j=1$ et $r_{\sigma(j+1)j+1}\dots r_{\sigma(n)n}=1$ si $j=n$,

$$\begin{aligned}m_{\sigma(1)1}m_{\sigma(2)2}\dots m_{\sigma(n)2}&=m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(n-1)n-1}(m_{\sigma(n)n}-r_{\sigma(n)n})+m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(n-1)n-1}r_{\sigma(n)n}\\&=\dots\\&=\left(\sum_{j=1}^n m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(j-1)j-1}(m_{\sigma(j)j}-r_{\sigma(j)j})r_{\sigma(j+1)j+1}\dots r_{\sigma(n)n}\right)+r_{\sigma(1)1}\dots r_{\sigma(n)n},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|m_{\sigma(1)1}m_{\sigma(2)2}\dots m_{\sigma(n)n}-r_{\sigma(1)1}\dots r_{\sigma(n)n}|&\leq\sum_{j=1}^n|m_{\sigma(1)1}|\dots|m_{\sigma(j-1)j-1}||m_{\sigma(j)j}-r_{\sigma(j)j}||r_{\sigma(j+1)j+1}|\dots|r_{\sigma(n)n}|\\&\leq\sum_{j=1}^n\|m_1\|\dots\|m_{j-1}\|\|m_j-r_j\|\|r_{j+1}\|\dots\|r_n\|,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}|\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)-\mathrm{per}(r_1,\dots,r_n)| &\leq \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}|m_{\sigma(1)1}m_{\sigma(2)2}\dots m_{\sigma(n)n}-r_{\sigma(1)1}\dots r_{\sigma(n)n}|\\ &\leq \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{j=1}^{n}\|m_1\|\dots\|m_{j-1}\|\|m_j-r_j\|\|r_{j+1}\|\dots\|r_n\|\\ &= n!\sum_{j=1}^{n}\|m_1\|\dots\|m_{j-1}\|\|m_j-r_j\|\|r_{j+1}\|\dots\|r_n\|.\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall((m_1,\dots,m_n),(r_1,\dots,r_n))\in((\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})))^2,\\ |\mathrm{per}(m_1,\dots,m_n)-\mathrm{per}(r_1,\dots,r_n)|\leq n!\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\|m_1\|\dots\|m_{j-1}\|\|m_j-r_j\|\|r_{j+1}\|\dots\|r_n\|.\end{array}}$$

3. Soit $j\in I_n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{per}M &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(j)j}\dots m_{\sigma(n)n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(j)=i}}m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(j-1)j-1}m_{ij}m_{\sigma(j+1)j+1}\dots m_{\sigma(n)n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}m_{i,j}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(j)=i}}m_{\sigma(1)1}\dots m_{\sigma(j-1)j-1}m_{\sigma(j+1)j+1}\dots m_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a isolé comme facteur de $m_{i,j}$ la somme de tous les produits de $n-1$ facteurs où le numéro de ligne i et le numéro de colonne j ne sont pas utilisés. Cette somme est $\mathrm{per}\,(M(i|j))$.
On a donc établi la formule de développement d'un permanent suivant sa j-ème colonne :

$$\boxed{\forall j\in I_n,\ \mathrm{per}M=\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}\mathrm{per}\,(M(i|j)).}$$

II Formes quadratiques

4. Soient $H\in\mathcal{V}_0^+$ et $G\in\mathcal{V}^-$ puis $x\in H\cap G$. La restriction de Φ_Q à H est positive et donc $Qx.x\geq 0$. Si $x\neq 0$, puisque la restriction de Φ_Q à G est définie négative, on a $Q\dfrac{x}{\|x\|}.\dfrac{x}{\|x\|}<0$ et donc $Qx.x<0$ ce qui n'est pas. Donc, $x=0$.
On a montré que $H\cap G=\{0\}$ et donc la somme $H+G$ est directe. On choisit alors pour H (resp. G) un sous-espace élément de $\mathcal{V}^+$ tel que $r(\Phi_Q)=\mathrm{dim}H$ (resp. élément de $\mathcal{V}^-$ tel que $s(\Phi_Q)=\mathrm{dim}G$). H est en particulier élément de V_0^+ et donc la somme $H+G$ est directe. Par suite,

$$n\geq \mathrm{dim}H+\mathrm{dim}G=r(\Phi_Q)+s(\Phi_Q).$$

$$\boxed{r(\Phi_Q)+s(\Phi_Q)\leq n.}$$

5. Le résultat est clair si $n^+(Q)=0$. Sinon, on suppose ordonnées les valeurs propres de Q de sorte que pour $1\leq i\leq n^+(Q)$, $\lambda_i>0$ (et $\lambda_i<0$ pour $i>n^+(Q)$).
Q est symétrique réelle et donc diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de Q et associée à la famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.
Soit $H=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{n^+(Q)})$. Pour $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n^+(Q)}x_ie_i$ tel que $\|x\|=1$, on a $Qx.x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n^+(Q)}\lambda_ix_i^2>$ car les λ_i sont strictement positifs et les x_i^2 sont positifs, l'un d'entre l'étant strictement.
Ainsi, la restriction de Q à H est définie positive et donc $n^+(Q)=\mathrm{dim}(H)\leq r(\Phi_Q)$.
En appliquant ce résultat à $-Q$, on a aussi $s(\Phi_Q)\geq n^-(Q)$.

$$\boxed{r(\Phi_Q)\geq n^+(Q)\text{ et }s(\Phi_Q)\geq n^-(Q).}$$

6. Les valeurs propres de Q sont réelles et non nulles. Par suite, $n = n^+(Q) + n^-(Q)$. On a donc

$$n = n^+(Q) + n^-(Q) \leq r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n,$$

ce qui montre que les inégalités $r(\Phi_Q) \geq n^+(Q)$ et $s(\Phi_Q) \geq n^-(Q)$ sont des égalités.

$$\boxed{r(\Phi_Q) = n^+(Q) \text{ et } s(\Phi_Q) = n^-(Q).}$$

7. Supposons que $r(\Phi_Q) \geq 1$. Soit H un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de Φ_Q à H est définie positive et $\dim H = r(\Phi_Q)$.
Φ_Q est une forme quadratique et est donc continue sur $H \cap S$. De plus, $H \cap S$ est un fermé borné de H et donc un compact de H d'après le théorème de Borel-Lebesgue, non vide car $\dim H \geq 1$. Φ_Q admet donc un minimum sur $H \cap S$ atteint en un certain x_0 de $H \cap S$. Puisque la restriction de Φ_Q à H est définie positive, on a $\Phi_Q(x_0) > 0$. Soit $\delta = \dfrac{1}{2}\Phi_Q(x_0) > 0$.

Soit maintenant R une matrice symétrique réelle inversible de taille n telle que $\exists k \in [0, \delta]$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|B_Q(x, y) - B_R(x, y)| \leq k\|x\|\|y\|$.
En particulier, $\forall x \in H \cap S,\ |\Phi_Q(x) - \Phi_R(x)| \leq k$. Mais alors pour $x \in H \cap S$,

$$\Phi_R(x) = \Phi_Q(x) + (\Phi_R(x) - \Phi_Q(x)) \leq \Phi_Q(x) - |\Phi_R(x) - \Phi_Q(x)| \geq \Phi_Q(x_0) - k = 2\delta - k \geq \delta > 0.$$

Ainsi, la restriction de Φ_R à H est définie positive et on en déduit que $r(\Phi_Q) = \dim H \leq r(\Phi_R)$. Par symétrie des rôles de Q et R, on a aussi $r(\Phi_R) \leq r(\Phi_Q)$ et donc $r(\Phi_Q) = r(\Phi_R)$.
Si $r(\Phi_Q) = 0$, on applique ce qui précède à $-Q$.

On a montré que

$$\boxed{\exists \delta > 0/\ r(\Phi_Q) = r(\Phi_R) \text{ si } k \leq \delta.}$$

III Espaces de Lorentz

8. Soit $H = \mathrm{Vect}(a, b)$. Puisque (a, b) est libre, H est un plan.
Supposons par l'absurde que $\forall \rho \in \mathbb{R},\ \varphi(\rho) \geq 0$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si $\lambda = 0$, on a $\Phi_Q(\lambda b + \mu a) = \Phi_Q(\mu a) = \mu^2\Phi_Q(a) \geq 0$ et si $\lambda \neq 0$, on a $\Phi_Q(\lambda b + \mu a) = \lambda^2\Phi_Q\left(b + \dfrac{\mu}{\lambda}a\right) = \lambda\varphi\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right) \geq 0$.
Finalement, la restriction de Φ_Q à H est positive.

Si maintenant G est un élément de $\mathcal{V}^-$ tel que $\dim G = s(\Phi_Q) = n - 1$, la question 4. permet d'affirmer que

$$n \geq \dim H + \dim G = 2 + (n - 1) = n + 1.$$

Ceci est absurde et donc

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \varphi(\lambda) < 0.}$$

9. Supposons encore que b ne soit pas colinéaire à a. Pour tout réel ρ, on a $\varphi(\rho) = \Phi_Q(a)\rho^2 + 2B_Q(a, b)\rho + \Phi_Q(b)$.
Puisque $\Phi_Q(a) > 0$, φ est un trinôme du second degré tendant vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme d'autre part $\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \varphi(\lambda) < 0$, le discriminant réduit de φ est strictement positif et donc

$$0 < \Delta' = B_Q(a, b)^2 - \Phi_Q(a)\Phi_Q(b).$$

Ainsi, si b n'est pas colinéaire à a, on a $B_Q(a, b)^2 > \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$.

Si maintenant b est colinéaire à a, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $b = ka$. On a alors

$$B_Q(a, b)^2 - \Phi_Q(a)\Phi_Q(b) = B_Q(a, ka)^2 - \Phi_Q(a)\Phi_Q(ka) = k^2(B_Q(a, a)^2 - \Phi_Q(a)^2) = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{B_Q(a, b)^2 \geq \Phi_Q(a)\Phi_Q(b) \text{ avec égalité si et seulement si } a \text{ et } b \text{ sont colinéaires.}}$$

IV Inégalité d'Alexandrov

10. $\chi_Q = (X-1)(X+1)$ et donc $\mathrm{Sp}Q = (1, -1)$. Q est donc inversible et d'après la question 6., on a alors $r(\Phi_Q) = n^+(Q) = 1$ et $s(\Phi_Q) = n^-(Q) = 1 = n - 1$. Le théorème 1 est donc établi quand $n = 2$.

On suppose dorénavant que $n \geq 3$ et que le théorème 1 est établi pour tout $k \leq n - 1$.

11. Soit $j \in I_n$. En développant le permanent $\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, m_{n-2}, c, e_j)$ suivant sa dernière colonne à partir de la formule de la question 3., on obtient

$$\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, m_{n-2}, c, e_j) = \mathrm{per}(m_1(j), \ldots, m_{n-3}(j), m_{n-2}(j), c(j)).$$

Maintenant, l'application $B_j\ :\ (m_{n-2}(j), c(j)) \mapsto \mathrm{per}(m_1(j), \ldots, m_{n-3}(j), m_{n-2}(j), c(j))$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{n-1}$. De plus, pour $1 \leq k, l \leq n - 1$, le coefficient de $m_{n-2}(j)_k c(j)_l$ dans le développement de $\mathrm{per}(m_1(j), \ldots, m_{n-3}(j), m_{n-2}(j), c(j))$ est le permanent de la matrice carrée de format $n - 3$ obtenu en retirant aux vecteurs $m_1,\ldots,\ m_{n-3}$ leurs lignes n° j, k et l ou plutôt le permanent de $(m_1(j), \ldots, m_{n-3}(j), e_k, e_l)$ c'est-à-dire le coefficient ligne k, colonne l d'une matrice Q de format $n - 1$ notée $Q_{n-1}(j)$.
Ainsi, la matrice de B_j dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$ est $Q_{n-1}(j)$. Par hypothèse de récurrence, $Q_{n-1}(j)$ est inversible et $r(\Phi_{Q_{n-1}(j)}) = 1$ et $s(\Phi_{Q_{n-1}(j)}) = n - 1$.

Maintenant, $\Phi_{Q_{n-1}(j)}(m_{n-2}(j)) = \mathrm{per}(m_1(j), \ldots, m_{n-3}(j), m_{n-2}(j), m_{n-2}(j)) > 0$ car les m_j sont à composantes strictement positives. La question 9. permet alors d'affirmer que

$$B_j(m_{n-1}(j), c(j))^2 \geq \Phi_{Q_{n-1}(j)}(m_{n-2}(j))\Phi_{Q_{n-1}(j)}(c(j)) \text{ avec égalité si et seulement si } c(j) \text{ est colinéaire à } m_{n-2}(j),$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall j \in I_n,\ \forall c \in \mathbb{R}^n,\\ \left(\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, m_{n-2}, c, e_j)\right)^2 \geq \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) \times \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, e_j)\\ \text{avec égalité si et seulement si } c(j) \text{ est colinéaire à } m_{n-2}(j).\end{array}}$$

12. Par n-linéarité et symétrie, on a

$$\begin{aligned}0 = Qc.c &= \sum_{1\leq i,j\leq n} q_{i,j}c_ic_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{per}(m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}, e_i, e_j)c_ic_j = \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, \sum_{i=1}^n c_ie_i, \sum_{j=1}^n c_je_j)\\ &= \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, c, c) = \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, \sum_{j=1}^n m_{j,n-2}e_j)\\ &= \sum_{j=1}^n m_{j,n-2}\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, e_j).\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{si } Qc = 0, \text{ alors } \sum_{j=1}^n m_{j,n-2}\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, e_j) = 0.}$$

13. Soit $j \in I_n$.
• Par linéarité par rapport à l'avant dernière colonne et par symétrie, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, c, e_j) &= \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, \sum_{i=1}^n c_ie_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, e_i, e_j)c_i\\ &= \sum_{i=1}^n q_{i,j}c_i = \sum_{i=1}^n q_{j,i}c_i = 0 \text{ (car } Qc = 0).\end{aligned}$$

• En développant $\mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-2},m_{n-2},e_j)$ suivant sa dernière colonne, on obtient

$$\mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-2},m_{n-2},e_j)=\mathrm{per}(m_1(j),\dots,m_{n-2}(j),m_{n-2}(j))>0,$$

car les m_k sont à composantes strictement positives.

$$\boxed{\forall j\in I_n,\ \mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-2},c,e_j)=0 \text{ et } \mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-2},m_{n-2},e_j)>0.}$$

14. Supposons $Qc=0$.
La question 13. et les inégalités (3) fournissent : $\forall j\in I_n,\ \mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-3},c,c,e_j)\leq 0$.
Puisque les $m_{j,n-2}$ sont strictement positifs, la question 12. montre que $\forall j\in I_n,\ \mathrm{per}(m_1,\dots,m_{n-3},c,c,e_j)=0$.
Mais alors, l'inégalité (3) est une égalité et d'après la question 11., $\forall j\in I_n$, $c(j)$ et $m_{n-2}(j)$ sont colinéaires. Comme $n\geq 3$, c est colinéaire à m_{n-2}. Ceci impose aux composantes de c d'être toutes de même signe.
Enfin, tous les $q_{i,j}$, $i\neq j$ sont strictement positifs et les égalités $\forall i\in I_n,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}q_{i,j}c_j=0$ impose $\forall j\in I_n,\ c_j=0$ et donc $c=0$.

On a montré que $Qc=0$ équivaut à $c=0$ et donc que $\mathrm{Ker}Q=\{0\}$. On en déduit que

$$\boxed{Q \text{ est inversible.}}$$

15. Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$,

$$B_0(x,y)=\mathrm{per}(e,\dots,e,x,y)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\mathrm{per}(e,\dots,e,e_i,e_j)x_iy_j.$$

On en déduit que $\forall(i,j)\in I_n,\ q_{i,j}=\mathrm{per}(e,\dots,e,e_i,e_j)$.

• Si $i=j$, en développant suivant la dernière colonne puis l'avant dernière, on obtient $q_{i,j}=0$.
• Si $i\neq j$, toujours en développant suivant la dernière puis suivant l'avant dernière colonne, on obtient $\mathrm{per}(\underbrace{e',\dots,e'}_{n-2})$ où $e'=(\underbrace{1,\dots,1}\in\mathbb{R}^{n-2}$. Or

$$\mathrm{per}(e',\dots,e')=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-2}}1\times\dots\times 1=\mathrm{card}(\mathfrak{S}_{n-2})=(n-2)!.$$

Finalement,

$$\boxed{Q_0=(n-2)!\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\dots&1&0\end{pmatrix}.}$$

Q est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. L'ordre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres est donc la dimension du sous espace propre correspondant.
$\mathrm{rg}(Q_0+(n-2)!I)=1$ et donc $-(n-2)!$ est valeur propre d'ordre $n-1$. La trace de Q_0 fournit la dernière valeur propre λ : $\lambda+(n-1)(-(n-2)!)=0$ et donc $\lambda=(n-1)!$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}Q_0=((n-1)!,\underbrace{-(n-2)!,\dots,-(n-2)!}_{n-1}),\ r(\Phi_{Q_0})=1,\ s(\Phi_{Q_0})=n-1.}$$

16. Soient θ et θ' deux éléments distincts de $[0,1]$. Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, d'après la question 2.,

$$
\begin{aligned}
|B_\theta(x,y) - B_{\theta'}(x,y)| &= |\mathrm{per}(\theta m_1 + (1-\theta)e, \dots, \theta m_{n-2} + (1-\theta)e, x, y) - \mathrm{per}(\theta' m_1 + (1-\theta')e, \dots, \theta m_{n-2} + (1-\theta')e, x, y)| \\
&\leq n! \sum_{j=1}^{n-2} \|\theta m_1 + (1-\theta)e\| \dots \|\|\theta m_{j-1}1 + (1-\theta)e\| \\
&\qquad\qquad \|(\theta' - \theta)(m_j - e)\|\theta' m_{j+1} + (1-\theta')e\| \dots \|\theta' m_{n-2} + (1-\theta')e\|\|x\|\|y\| \\
&\leq n!|\theta - \theta'|\|x\|\|y\| \sum_{j=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} (\|m_i\| + \|e\|) = (n-2)n!|\theta - \theta'|\|x\|\|y\| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_j\| + \sqrt{n}) \\
&\leq n\, n!|\theta - \theta'|\|x\|\|y\| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_j\| + \sqrt{n}).
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall (\theta, \theta') \in [0,1]^2,\ |B_\theta(x,y) - B_{\theta'}(x,y)| \leq n\, n!|\theta - \theta'|\|x\|\|y\| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_j\| + \sqrt{n}).}
$$

17. Tout d'abord, pour $\theta \in [0,1]$, les vecteurs $\theta m_i + (1-\theta)e$, $1 \leq i \leq n-2$ sont à composantes strictement positives et on peut appliquer à la matrice Q_θ les questions 11. à 14. pour obtenir

$$
\forall \theta \in [0,1],\ Q_\theta \in \mathcal{GL}_(\mathbb{R}).
$$

Considérons alors $\mathscr{P} = \{\theta \in [0,1]/\ r(\Phi_{Q_\theta}) = 1\}$. $\mathscr{P}$ est une partie non vide $\mathbb{R}$ (car $0 \in \mathscr{P}$) et majorée par 1. $\mathscr{P}$ admet donc une borne supérieure $\tau \in [0,1]$.

• Montrons que $\tau \in \mathscr{P}$. Il existe une suite $(\theta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$ tendant vers τ. La suite de matrices correspondantes $(Q_{\theta_p})_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice Q_τ car les coefficients de Q_θ sont des fonctions continues de θ. Mais alors, la suite des spectres $(\mathrm{Sp}(Q_{\theta_p}))_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers le spectre de Q_τ puisque les coefficients du polynôme caractéristique de Q_θ sont des fonctions continues de θ.
On en déduit que Q_τ admet une valeur propre positive ou nulle et $n-1$ valeurs propres négatives ou nulles. Comme d'autre part 0 n'est pas valeur propre de Q_τ, Q_τ admet une valeur propre strictement positive et $n-1$ valeurs propres strictement négatives. Finalement $\tau \in \mathscr{P}$.

• Supposons par l'absurde que $\tau < 1$.

D'après la question 7. et la question 16., il existe un réel $\delta \in]0, 1-\tau[$ tel que si $n\, n!|\theta - \tau| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_i\| + \sqrt{n}) \leq \delta$ alors $r(\Phi_{Q_\theta}) = 1$ et donc il existe $\theta \in]\tau, 1] \cap \mathscr{P}$ ce qui contredit la définition de τ.

Finalement, $\tau \in \mathscr{P}$ et $\tau = 1$ ce qui montre que $(\mathbb{R}^n, Q_1)$ est un espace de Lorentz. Le théorème 1 est donc démontré par récurrence.

18. Puisque $(\mathbb{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz, on peut appliquer la question 9. à la forme B_Q. Puisque les m_i, $1 \leq i \leq n-1$, sont à composantes strictement positives, on a $\Phi_Q(m_{n-1}) = \mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_{n-1}) > 0$ et donc, si b n'est pas colinéaire à m_{n-1}, on a

$$
(B_Q(m_{n-1}, b))^2 \geq \Phi_Q(m_{n-1})\Phi_Q(b),
$$

ce qui s'écrit $(\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, b))^2 \geq \mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_{n-1})\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, b, b)$.

Il reste à étudier le cas où b est colinéaire à m_{n-1}. Dans ce cas, il existe un réel λ tel que $b = \lambda m_{n-1}$. On a alors

$$
\begin{gathered}
(\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, b))^2 - \mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_{n-1})\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, b, b) = \\
\lambda^2 \left((\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_{n-1}))^2 - (\mathrm{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_{n-1}))^2 \right) = 0.
\end{gathered}
$$

On a montré que l'inégalité de la question 18. est valable pour tout choix de b.

