Partie A : Évaluation des ressources

Exercice I

I.1) Déterminons la matrice A de f dans la base B. **0,5 pt**

$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

I) 2) Montrons que A est inversible et déterminons sa matrice inverse A^{-1}.

Dét A = - 7. Et comme $\det A \neq 0$, alors la matrice A est inversible et son inverse est : **0,75 pt**

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$

II) 1) Montrons que kerg est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e_1} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ **0,5 pt**

De $g(\vec{i}) = f(\vec{i}) - \vec{i}$ et $g(\vec{j}) = f(\vec{j}) - \vec{j}$, il vient que pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de E

$g(\vec{u}) = f(\vec{u}) - \vec{u} = (-6x - 4y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j}$

Ainsi $\vec{u} \in \ker g \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0$. D'ou $\ker g = \{\vec{u}(x, y); 3x - 2y = 0\}$ qui est une droite vectorielle. **0,5 pt**

En plus $3 \times (-2) - 2 \times (-3) = 0$, Ainsi le vecteur non nul $\vec{e_1} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ est une base de $\ker g$ **0,5 pt**

II 2) Montrons que $\mathrm{Im} g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e_2} = 2\vec{i} - \vec{j}$ **0,5 pt**

Soient $\begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases}$ deux vecteurs de E.

$\vec{u'} = g(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -6x + 4y \\ y' = 3x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -6x + 4y \\ -2y' = -6x + 4y \end{cases}$. Ainsi, $\mathrm{Im} g = \{\vec{u'}(x', y'); x' + 2y' = 0\}$ qui est une droite vectorielle.

En plus, $2 + 2 \times (-1) = 0$. Ainsi le vecteur $\vec{e_2} = 2\vec{i} - \vec{j}$ est une base de $\mathrm{Im} g$.

II) 3) a) Montrons que B' est une base de E.

$\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 8 \neq 0$, alors B' est un système libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2. Donc B' est une base de E.

II) 3) b) Montrons que $g(\vec{e_2}) = -8\vec{e_2}$ **0,5 pt**

$g(\vec{e_2}) = -16\vec{i} + 8\vec{j} = -8(2\vec{i} + \vec{j}) = -8\vec{e_2}$

II) 3) c) Déduisons-en la matrice C; de g dans la base B'.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

II) 3) d) Déterminons la matrice A' de f dans la base B'.

De $g(\vec{e_1}) = f(\vec{e_1}) - \vec{e_1}$ et $g(\vec{e_2}) = f(\vec{e_2}) - \vec{e_2}$, on a $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = -7\vec{e_2}$

Donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice II

1) Recopions et complétons le tableau. **1,25 pt**

Nombre d'heures d'absence :	**[0; 3[**	**[3; 6 [**	**[6 ; 9 [**	**[9 ; 12 [**	**[12 ; 15 [**
Nombre d'élèves :	**18**	**8**	**12**	**20**	**2**
Effectifs cumulés croissants	**18**	**26**	**38**	**58**	**60**

2) Calculons le nombre moyen d'heures d'absence. (Arrondissons le résultat à l'unité supérieure).

0,5 pt

Ce nombre moyen d'heures d'absence est égal à $\frac{1}{60}\sum_i n_i \times c_i = \frac{390}{60} \approx 7$; soit environ 7 heures

3) Déterminons la médiane de cette série statistique. **0,5 pt**

L'intervalle médian est [6 ; 9[. Si Me désigne celte médiane, alors par interpolation linéaire,

$\frac{30-26}{Me-6} = \frac{38-26}{9-6} \Rightarrow Me = 7$

4) Déterminons le nombre de groupes d'étude que l'on peut former contenant au moins deux élèves ayant moins de neuf heures d'absence et contenant au moins deux élèves ayant au moins neuf heures d'absence.

Le nombre cherché est $C_{38}^2 \times C_{22}^3 + C_{38}^3 \times C_{22}^2 = 3031336$

Exercice III

I)1) Déterminons une équation cartésienne de l'ensemble (F) des points M du plan tels que $AM^2 + BM^2 = 102$

Soit M(x; y) un point du plan.

$AM^2 + BM^2 = 102 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 6)^2 + (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 102 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

Ou bien, $AM^2 + BM^2 = 102 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 102$ où I est le milieu de [AB]et I(-1; 1) soit $IM = 5 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

I) 2) Déduisons-en la aature et les éléments caractéristiques do (F).

(Γ) est le cercle de centre I(-1 ; 1) et de rayon 5.

II) Déterminons les réels a, b et c. **0,75 pt**

On a : $\begin{cases} f(0) = 6 \\ f(-2) = -4 \\ f(-3) = 0 \end{cases}$

D'où a=1, b= 2 et c = 4

III) 1-i) Déterminons les limites de g en $-\infty$, $+\infty$, -1^- et -1^+

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ **0,5 pt**
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **0,5 pt**
- $\lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$ **0,5 pt**
- $\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$ **0,5 pt**

III) 1-ii) Déduisons-en une équation de l'asymptote verticale à la courbe de g. **0,25 pt**

Une équation de l'asymptote verticale à la courbe de g est $x = -1$ car $\lim_{x\to-1} g(x) = -\infty$.

III) 2) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de g. **0,25 pt**

$\lim_{x\to-\infty}(g(x) - (x+2)) = \lim_{x\to+\infty}(g(x) - (x+2)) = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote a la courbe de g.

III) 3) Etudions le sens de variations de la fonction g sur chacun des intervalles où elle est définie. Nous dresserons le tableau de variations de la fonction g.

La fonction g est dérivable en tout réel $x \neq -1$ et $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

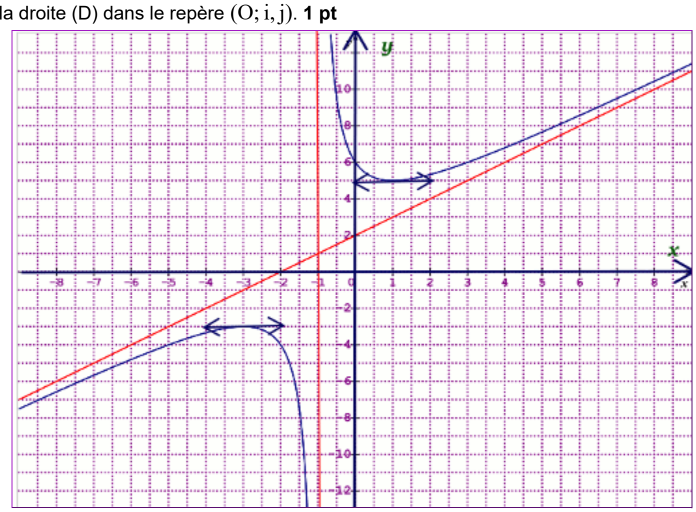
D'une étude de signe de g'(x) pour $x \neq -1$, il vient que :

g est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -3]$ **et** $[1; +\infty[$

g est strictement décroissante sur les intervalles $]-3; -1[$ **et** $]-1; 1[$**, Ainsi :**

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

4) Construisons la courbe de la fonction g et la droite (D) dans le repère $(O; i, j)$. **1 pt**



Exercice IV

1) Déterminons les coordonnées des points, I, J, C et H dans le repère IR. **1 pt**

$I\,(0; \frac{1}{2}; 0)$, $J\,(1; \frac{1}{2}; 1)$, $C\,(1; 1; 0)$ et $C\,(0; 1; 1)$

2) Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{EC}$ **0.5 pt**

- $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HC} = 0$
- $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{EC} = 0$

3) Déduisons-en que la droite (IJ) est orthogonale au plan (EHC).

D'après la question 2) précédente, la droite (IJ) est orthogonale aux droites sécantes (HC) et (EC). Par conséquent, la droite (IJ) est orthogonale au plan (EHC) **0,25 pt**

4) Écrivons une équation cartésienne du plan (EHC). 0,5 pt

D'après la question 3) précédente, le vecteur $\overrightarrow{IJ}\,(1; 0; 1)$ est un vecteur normal au plan (EHC), ainsi, $x + z + d = 0$ est une forme d'une équation du plan (EHC). Et comme E(0; 0 ;1) appartient à ce plan, alors d = -1. Donc x + z - 1 = 0 est une équation cartésienne du pian (EHC).

5) Écrivons une représentation paramétrique de ta droite (IJ).

$x = k$, $y = \frac{1}{2}$ et $z = k$ où k est un réel. **0,25 pt**

6) Déterminons la hauteur du tétraèdre IEHC **0,5 pt**

Cette hauteur est la distance IP qui est aussi égale à la distance du point I au plan (EHC). **0,5 pt**

$IP = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Partie B : Évaluation des compétences

Tâche 1) Étudions si la totalité d'argent contenu dans le premier compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra permettre à M. ATEBA de payer la pension de son fils PIERRE.

• Déterminons le nombre de mois qui s'écoulent entre fin janvier 2019 et début septembre 2020.

19 mois s'écoulent entre fin janvier 2019 et début septembre 2020.

• Déterminons le montant contenu dans le premier compte après 19 mois.

M0 = 200 000 est le montant initial dans ce compte.

Le montant disponible dans ce compte après le 1er mois est égal à $M_1 = M_0 + 0,05M_0 = 1,05M$

Le montant disponible dans ce compte après le 2e mois est égal à $M_2 = 1,05M_1 = (1,05)^2 M_0$

Ainsi, le montant contenu dans le premier compte après le 19e mois est égal à $M_{19} = (1,05)^{19}\ M_0 \approx 505390$. Soit environ 505 390 FCFA.

• Donnons la conclusion.

Le montant disponible dans le premier compte est environ 505 390 FCFA, qui est supérieur à 350 000 FCFA qui est la pension de PIERRE. Donc M. ATEBA pourra payer la pension de son fils PIERRE.

Tâche 2) Étudions si la totalité d'argent contenu dans le second compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra permettre à M. ATEBA de payer la pension de son fils ARNAUD.

• Déterminons le nombre de mois qui s'écoulent entre fin janvier et début septembre 2020.

19 mois s'écoulent entre fin janvier 2019 et début septembre 2020.

• Déterminons le montant contenu dans le second compte après 19 mois.

$S_0 = 500000$ est la somme initiale dans ce compte.

La somme disponible dans ce compte après le 1er mois est égal à $S_1 = S_0 + 25000$.

La somme disponible dans ce compte après le 2e mois est égal à $S_2 = S_1 + 25000 = S_0 + 25000 \times 2$

Ainsi, la somme contenue dans le second compte après le 19e mois est égal à $S_{19} = S_0 + 25000 \times 19 = 525000$

• Donnons la conclusion.

La somme disponible dans le second compte est de 525 000 FCFA, qui est supérieure à 500 000 FCFA qui est la pension de ARNAUD. Donc M. ATEBA pourra payer la pension de son fils ARNAU D.

Tâche 3) Étudions si la totalité d'argent contenu dans le troisième compte jusqu'en début du mois de septembre 2020 pourra permettre à M. ATEBA de payer la pension de sa fille AGNES.

• Déterminons le nombre de mois qui s'écoulent entre fin janvier 2019 et début septembre 2020.

19 mois s'écoulent entre fin janvier 2019 et début septembre 2020.

• Déterminons le montant des avoirs contenu dans le troisième comme après 19 mois.

$A_0 = 80000$ est la somme initiale dans ce compte.

A cette somme initiale après le 1er mois, s'ajoute la somme $A_1 = A_0 + 8000$

A cette somme A_1, après le 2e mois, s'ajoute la somme $A_2 = A_0 + 8000 \times 2$

Et ainsi de suite, après le 19e mois, s'ajoutera la somme $A_19 = A_0 + 8000 \times 19$

Par cumul, le montant total dans ce compte est de $A_0 + \ldots + A_{19} = 2320000$

Soit 320-000 FCFA.

• Donnons la conclusion.

La somme disponible dans le troisième compte est de 2 320 000 FCFA, qui est supérieure à 375 000 FCFA qui est la pension de AGNES. Donc M. ATEBA pourra payer la pension de sa fille AGNES.

N.B. : Le point réservé à la présentation porte sur l'ensemble de toute la copie du candidat.