Exercice I / 5 pts

1. Déterminons les racines carrées de $3+4i$ **0,5 pt**

Soit $u = a - ib$ avec $(a, b \in R^2)$ un nombre complexe tel que $u^2 = 3+4i$, après développement nous obtenons $u^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et

$\left|u^2\right| = a^2 + b^2 = \sqrt{3^2+4^2}$ soit le système d'équation $\left\{ 2ab = 4a^2 - b^2 = 3a^2 + b^2 = 5 \right.$ ainsi $\left\{ a = 2b = 1 \right.$ ou

$\left\{ a = -2b = -1 \right.$ **0,5pt**

2.a) Montrons que (E) admet une unique solution réelle z_0 **0,5 pt**

x est une solution réelle de (E)

$x^3 - (5+3i)x^2 + (5+8i)x - 1 - 5i = 0$ en séparant la partie réelle de la partie imaginaire nous avons :

Partie réelle

$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$

Partie imaginaire

$3x^2 - 8x + 5 = 0$ de solution $\left\{ x = 1x = 53 \right.$ ainsi, $x = 1$ vérifie l'équation découlant de la partie réelle, nous pouvons donc conclure que $z_0 = 1$ est solution unique réelle.

2.b) Résolutions de l'équation (E) **1 pt**

$z^3 - (5+3i)z^2 + (5+8i)z - 1 - 5i = (z-1)(z^2 + az + b)$

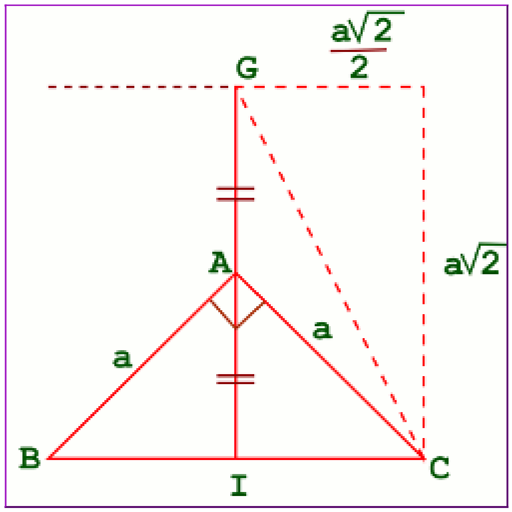
Après développement du second membres, nous obtenons par identification $\left\{ a = -4 - 3ib = 1 + 5i \right.$

D'où $\left\{ z0 = 1z_1 = 1 + iz_2 = 3 + 2i \right.$

3.a) Détermination de G **0,5 pt**

G est barycentre des points (A,4) et (I,-2) où I est le milieu de [BC], dont $\rightarrow AG = -\rightarrow AI$

Construisons G



3.b) Déterminons l'ensemble (E_1) **1,5 pt**

$M \in E_1 \Leftrightarrow 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$

Soit $2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2 = -2a^2$

$GA^2 = \left(a\sqrt{2}\ 2\right)^2 = 12a^2,$

$GB^2 = GC^2 = 52a^2$, nous obtenons après remplacement dans l'expression initiale $MG = \sqrt{2}\ 2\ a$

D'où (E1) est un cercle de centre G et rayon $\sqrt{2}\ 2\ a$

4.a) Déterminons la forme complexe de S **0,5 pt**

$S(A) = A$, $S(B) = C$ et

$z' = az + b \Rightarrow \{ a + b = 1(1 - 3i)a + b = -2$

$\{ a = -ib = 1 + i$ d'où

$S: z' = -z + 1 + i$

4.b) Déduisons-en les élément caractéristiques de S **0,5 pt**

S est une similitude directe de rapport 1, de centre A et d'angle $-\pi 2$ ou (S est la rotation de centre A et d'angle $-\pi 2$)

Exercice II / 4 pts

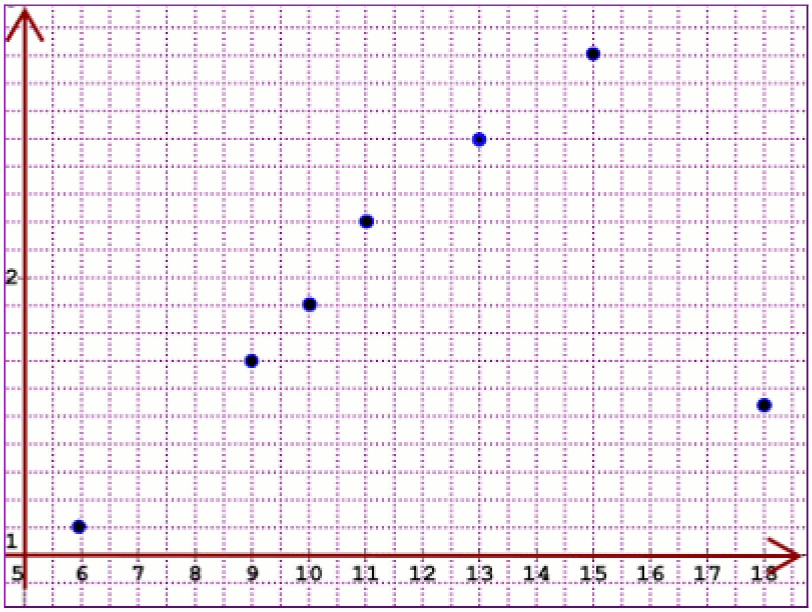
1.a) Déterminons P_1 **0,75 pt**

$P_1 = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$

1.b) Déterminons P_2 **0,75pt**

$P_2 = P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = 0,0488$

2.a) Représentons le nuage de points de la série **1 pt**



2.b) Déterminons les coordonnées du point moyen G **0,5 pt**

Abscisse : $\frac{\sum xi}{7} = 11,71$

Ordonnée : $\frac{\sum y_i}{7} = 1,95$

2.c) Déterminons la covariante de x et y **1 pt**

D'après la formule $\mathrm{cov}(x, y) \approx 0,91$

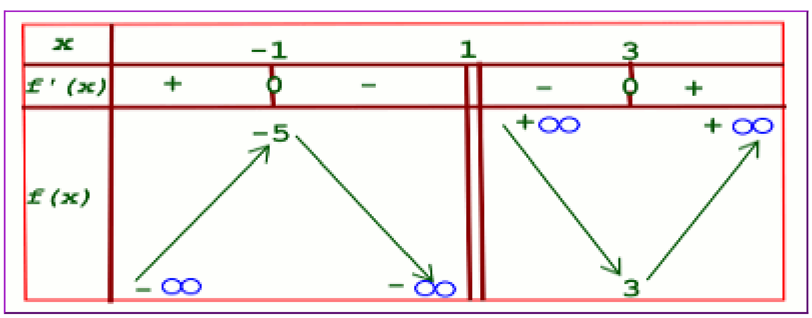
Problème / 11 pts

Partie A

Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation **2 pts**

$Df = R - \{1\}$

$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$



2. Déterminons les asymptotes de (C) **0,5 pt**

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$, donc la droite d'equation x=1 est asymptote à (C)

$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ et $\lim_{x \to 1}(f(x) - x + 2) = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe (C)

3. Montrons que I(1, -1) est centre de symétrie pour (C) **1 pt**

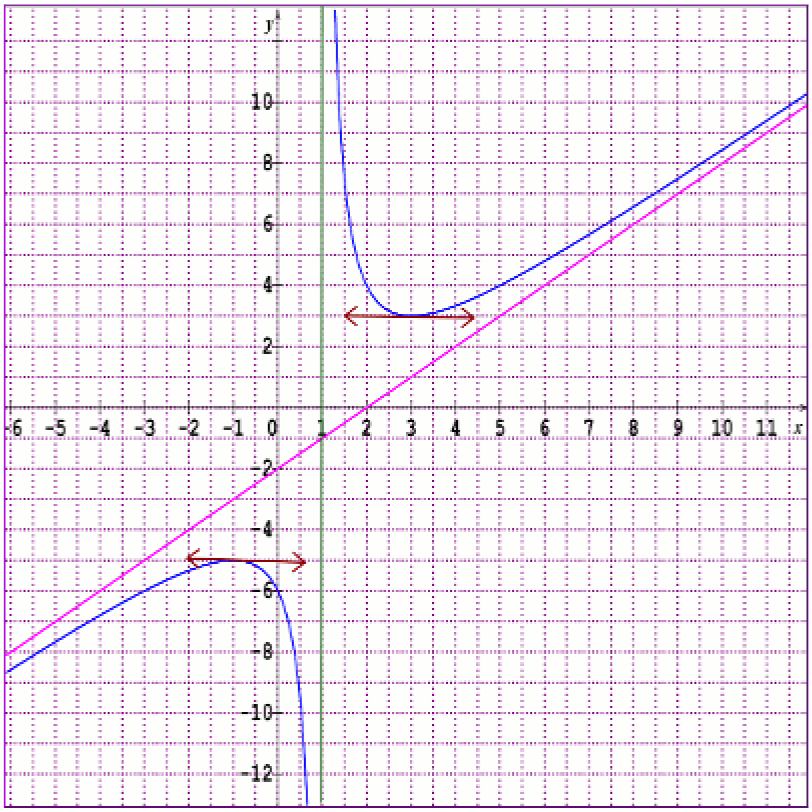
Soit x un réel de Df ; montrons que 2-x appartient à Df

$x \in Df \Rightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq -1 \Leftrightarrow -2-x \neq 2-1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Rightarrow 2-x \in Df$

Montrons que $f(2-x) + f(x) = -2$

Donc I(1 ; -1) est centre de symétrie pour (C)

4.a Traçons (C) **1 pt**



4.b) Calcule de l'aire demandée. **1 pt**

$$\int_{0}^{-1}(x-2-f(x))dx = -\int_{0}^{-1}\left(4x-1\right)dx = 4\ln 2 \text{ cm}^2$$

Partie B **2,5 pts**

1. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $Un \geq 3$ **1 pt**

$U_0 = 10 \geq 3$

Soit n entier naturel, supposons que $Un \geq 3$

Comme f est croissante $[3; +\infty[$, on a $f(Un) \geq f(3)$ d'où $U_{n+1} \geq 3$

D'après le principe de récurrence, $Un \geq 3$ pout tout entier n

2.a Montrons que U_n est décroissante **0,5 pt**

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = U_n - 2 + 4U_n - 1 - U_n = -2 + 4U_n - 1$

$U_n \geq 3 \Leftrightarrow U_n - 4 \geq 3 - 1 \Leftrightarrow U_n - 1 \geq 2$

$1U_n - 1 \leq 12 \Rightarrow 4U_n - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 4U_n - 1 \leq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$

D'où (Un) est décroissante

2.b) Justifions la convergence de (Un) **0,25 pt**

(Un) est minorée par 3 et est décroissante donc est convergente

3.a) Résoudre dans R l'équation $f(\alpha) = \alpha$ **0,25 pt**

$\alpha \neq 1, f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow a - 2 + 4\alpha - 1 = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$

3.b) Determinons la limite de (Un) **0,5 pt**

La suite (Un) est convergente, $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_n \geq 3$ pour tout n

Comme f est une fonction continue sur $[3, +\infty[$, la limite de (Un) est solution dans $[3, +\infty[$, de l'equation f(x)=x. d'où cette limite vaut 3

Partie C **3 pts**

Déterminons la fonction **1 pt**

Supposons que la fonction affine $g : x \mapsto ax + b$ est une solution de (D)

Nous avons alors

$g'' + 2g' + g = -x - 1 \Rightarrow 2a + ax + b = -x - 2$

On retrouve par identification a=-1 et b =0

D'où $g(x) = -x$

2. Demontrons que h-g est une solution de (D') $\Leftrightarrow$ h est solution de (D) 0,5 pt

$(h-g)'' + 2(h-g)' + h - g = 0 \Leftrightarrow h'' + 2h' + h = g'' + 2g' + g$

$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = -x - 2$ donc h est solution de (D)

3. Résolvons (D') et en déduire la solution de h de (D) **1,5 pt**

Une équation caractéristique de (D') est $r^2 + 2r + 1 = 0$; elle a une solution qui est -1.

Donc les solution de (D') sont les fonctions numériques h-g telles que : $h(x) - g(x) = (ax + b)e^{-x}$

D'où les solutions de (D) sont les fonctions numériques h telles que

$h(x) = (ax + b)e^{-x} + g(x) = (ax + b)e^{-x} - x$ alors $h(0) = b = -1$

$h'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} - 1$ d'où $h'(0) = (a - b) - 1 = -1$ ce qui donne a = -1 d'où

$h'(x) = -(x + 1)e^{-x} - x$