Un système de numération est une manière de représenter tout entier naturel.

Une méthode consiste à choisir un entier naturel a supérieur à 1, à définir a symboles et à écrire tout entier naturel à l'aide de ces a symboles.

On dit que l'on a alors défini un système de numération de base a; les symboles utilisés sont appelés les çhiffres de ce système.

Le système de numération utilisé dans le langage courant est le système de numération de base dix, appelé système de numération décimale ; ce système utilise comme symboles les chiffres suivants, appelés chiffres arabes : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Dans le système décimal l'entier dix s'écrit 10 et l'entier x qui s'écrivant 357, est égal à : $3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.

L'expression $3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ est appelée développement de l'entier x suivant les puissances de dix.

Nous allons généraliser ces résultats dans le paragraphe suivant.

I. Développement d'un entier naturel suivant les puissances de a

Théorème 1 : Soient a un entier naturel supérieur à 1 et x un entier naturel quelconque non nul.
Il existe un unique entier naturel n tel que l'on ait : $a^n \leq x \prec a^{n+1}$

Démonstration :

Soit E l'ensemble des entiers naturels p tels que l'on ait : $x \prec a^p$

Unicité.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que l'on ait : $a^n \leq x \prec a^{n+1}$

L'entier $n+1$ appartient donc à E; démontrons que $n+1$ est nécessairement le plus petit élément de E, s'il existe.

Supposons que le plus petit élément de E, s'il existe, soit un entier q distinct de $n+1$ et, par suite, inférieur à $n+1$.

On a alors : $q \leq n+1 \Leftrightarrow (q \leq n) \Rightarrow (a^p \leq a^n)$

Or, par définition de n, on a : $(a^n \leq x)$ et par définition de q : $(a^p \leq x)$.

Il y a donc contradiction.

L'entier $n+1$, s'il existe, est unique et il en est de même de l'entier n.

Existence.

Il suffit de démontrer que l'ensemble E admet un plus petit élément non nul.

Dire que a est supérieur à 1 équivaut à dire que a est supérieur ou égal à 2. Il existe donc un entier b supérieur ou égal à 1 tel que l'on ait : $a = 1 + b$.

On a alors, d'après la formule du binôme :

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p}$$

$a^x = (1-b)^x = 1^x + 1^{x-1}b + \ldots + b^x$

Chacun des termes de cette somme est strictement positif ; on a donc : $a^x \geq xb \geq x \times 1$, par suite $a^x \succ x$
L'entier x appartient à E, qui n'est donc pas vide.
D'autre part 0 n'appartient pas à E.
L'ensemble E admet donc un plus petit élément qui n'est pas nul,

Remarque : Soient n un entier naturel quelconque et A_n l'ensemble des entiers naturels non nuls x tels que l'on ait : $a^x \leq x \prec a^{n+1}$
Le théorème 1 équivaut à dire que la famille $(A_n)_{n\in N}$ est une partition de N^*.

THÉORÈME 2 : Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1. Pour tout entier naturel non nul x, il existe un unique entier naturel n et des uniques entiers naturels $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tels que l'on ait :
$x = x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \ldots + x_1 a^1 + x_0$ **avec** $0 \prec x_n \prec a$ **et** $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $0 \leq x_i \prec a$

L'expression $x = x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \ldots + x_1 a^1 + x_0$ est appelée développement de l'entier x suivant les puissances de a.

II. Système de numération de base a

Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1.
Le développement suivant les puissances de a de tout entier naturel x tel que : $0 \leq x \prec a$ est-égal à x
Si l'on prend comme chiffres les a entiers naturels : $0, 1, \ldots, a-1$, tout entier naturel x inférieur à a s'exprime à l'aide d'un chiffre,
Plus généralement, soit x un entier naturel dont le développement suivant les puissances de a est $x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \ldots + x_1 a^1 + x_0$. Chacun des entiers $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ est un chiffre et x est déterminé par la donnée de ces $n+1$ chiffres. On écrira x sous la forme : $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}^{\,a}$. Cette expression est appelée écriture de x dans le système de numération de base a

Par convention, dans le système décimal (appelé aussi à base 10), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux, à savoir : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

a) Système binaire ou système en base 2 :
Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1
b) Système octal ou système en base 8 :
Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7
c) Système hexadécimal ou système en base 16 :
Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; … ; F

III. Comparaison de deux entiers écrits dans le même système de numération.

Dire qu'un entier x s'écrit à l'aide de n chiffres dans le système de numération de base a équivaut à dire que cet entier satisfait aux inégalités : $a^n \leq x \prec a^{n+1}$.

Pour comparer deux entiers écrits en base a, on compare donc d'abord le nombre de leurs chiffres.

• Si ces deux entiers ont un nombre différent de chiffres, celui qui a le plus grand nombre de chiffres est le plus grand.

• Si ces deux entiers ont le même nombre de chiffres, on compare alors les chiffres correspondant à la plus grande puissance de a, et ainsi de suite.

IV. Addition et multiplication d'entiers écrits dans le même système de numération.

Pour additionner ou multiplier deux entiers écrits en numération décimale, il suffit de connaître la somme ou le produit de deux chiffres quelconques. Il est d'usage d'écrire tous ces résultats dans des tables appelées traditionnellement tables d'addition et tables de multiplication.

On utilise la même méthode pour additionner ou pour multiplier deux entiers écrits dans un système de numération de base quelconque.

Voici à titre d'exemple les tables d'addition et de multiplication en base 2 et en base 4

en base deux :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

en base quatre :

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

V Passage d'un système de base b à un système de base b^n

Pour passer d'un système de base b à un système de base b^n; on groupe les chiffres par n chiffres de la droite vers la gauche puis on les écrit en base 10 pour l'obtenir en base b^n