Activité

Une chambre a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite la carreler avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

L'arithmétique et un des secteurs scientifiques les plus anciens et les plus féconds. Fondée essentiellement par les pythagoriciens pour qui tout est nombre, elle a connu de grands progrès sous l'impulsion de Fermat, Euler, Lagrange Gauss et Legendre.
Longtemps considérée comme la branche la plus abstraite et la moins utile des mathématiques, elle connaît aujourd'hui de nombreuses applications en informatique, en électronique et en cryptographie.

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des Nombres : Entiers Naturels N, des Entiers Relatifs Z et des Nombres Rationnels Q.

I. Ensembles d'applications

En arithmétique, on utilise trois types de nombres :
- **Les Nombres Entiers Naturels N ;**
- **Les Nombres Entiers Relatifs Z ;**
- **Les Nombres Rationnels Q.**

I.1 Ensemble des Nombres entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, noté N est défini en extension comme suite
$\mathrm{N} = \{0; 1; 2; \ldots; n; n+1; \ldots\}$
On définit dans N deux lois de compositions internes :
- **L'addition :**

$\forall a \in \mathrm{N}$ et $\forall b \in \mathrm{N}$, $a + b = s \in \mathrm{N}$
- **La multiplication**

$\forall a \in \mathrm{N}$ et $\forall b \in \mathrm{N}$, $a \times b = p \in \mathrm{N}$

Exemple :
$2 + 3 = 5 \in \mathrm{N}$ **et** $3 \times 4 = 12 \in \mathrm{N}$

On définit aussi dans N une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de N, on a :
Soit $a \leq b$, soit $b \leq a$

Propriétés
P1 : N a un plus petit élément noté 0.
P2 : N n'a pas de plus grand élément.
P3 : Toute partie non vide de N a un plus petit élément.

I.2 Ensemble des Nombres entiers relatifs

L’ensemble des entiers relatifs, noté : $\mathbb{Z}$ est défini en extension comme suite :$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

Cet ensemble a la structure d'un anneau commutatif unitaire : On définit dans $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne :

- **Une addition ;**
- **Une multiplication.**

Propriétés :

P1 : L'addition est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 0.

P2 : La multiplication est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 1.

P3 : La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \times (a + c) = a \times b + a \times c$

P4 : L'existence d'un élément symétrique $-a$**, c'est-à-dire que** $a + (-a) = 0$**.**

NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.

$(\mathbb{Z}; +)$ **est un groupe commutatif.**

$(\mathbb{Z}; +; \times)$ **est un anneau commutatif unitaire.**

On définit dans $\mathbb{Z}$ une relation d'ordre ($\leq$) vérifiant les propriétés suivantes :

1) $a \leq b \Rightarrow a + b \leq b + c$ **;**

2) $a \leq b \; c \succ 0 \Rightarrow ac \leq bc$

3) $a \leq b$ **et** $c \prec 0 \Rightarrow ac \geq bc$

D'autres propriétés de $\mathbb{Z}$, que nous admettrons sans preuve sont :

P 1 - Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est majorée, a **un plus grand élément.**

P 2 - Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est minorée a**un plus petit élément.**

P 3 - Si a **et** b **sont deux entiers relatifs, et** b **est non nul, il existe un entier relatif** n **tel que** $nb \geq a$ **On dit dans ce cas que $\mathbb{Z}$ est archimédien**

I.3 Ensemble des Nombres rationnels

L’ensemble des nombres rationnels, noté : $\mathbb{Q}$ est un ensemble qui est défini en extension comme suite :

$\mathbb{Q} = \{\frac{P}{Q}\}$ avec $P \in \mathbb{Z}$ et $Q \in \mathbb{Z}^*$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

II Raisonnement par récurrence

En mathématiques, le raisonnement par récurrence (ou par induction, ou induction complète) est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels.

Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants :

- **La propriété est satisfaite par l'entier 0 ;**
- **Chaque fois que cette propriété est satisfaite par un certain nombre entier naturel n, elle est également satisfaite par son successeur, c'est-à-dire par le nombre entier** $n + 1$**.**

Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels.

Principe

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède de la façon suivante :

1ère Étape (Initialisation)

On vérifie que la proposition P_n est vraie pour le terme initial P_0 ;

2ième Étape (Transmission)

On suppose que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. C'est-à-dire que P_{n+1} est vraie.

3ième Étape (Conclusion)

On conclut qu'alors $\forall n \in Z$, P_n est vraie.