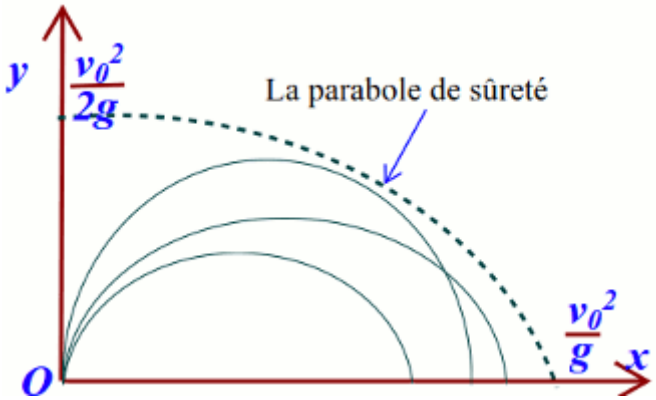
II.1.3.1 La parabole de sûreté



La parabole de sûreté est l'enveloppe qui enferme tous les points de l'espace que l'on peut atteindre avec un projectile (ballon) lancé de O avec une vitesse de module v_0 donné, dans une direction quelconque.

Nous savons que $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$, de l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + x\tan(\alpha)$$

Si nous considérons un point C(x_C, y_C) atteint par le projectile, il doit satisfaire à l'équation

$$y_C = -\frac{1}{2}g\frac{x_C^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + x_C\tan(\alpha)$$

Soit:

$$g.x_C^2\tan^2(\alpha) - 2x_C v_0^2\tan(\alpha) + 2y_C v_0^2 + gx_C^2 = 0$$

Cette équation permet de déterminer les angles α pour lesquels le ballon atteint le point C. elle n'a de solution que si

$$\Delta' = v_0^4 - (2y_C v_0^2 + g.x_c^2)g \geq 0$$

L'équation $v_0^4 - (2y_C v_0^2 + g.x_c^2)g = 0$ sera la limite des points atteints. elle peut s'écrire:

$$y_C = -\frac{g}{2v_0^2}x_C^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

C'est l'équation d'une parabole avec la concavité tournée vers la bas dite parabole de sécurité ou parabole de sûreté. Si les points sont à l'extérieur de la parabole , ils ne pourront être atteints car le discriminant réduit sera inferieur à zéro. Cette parabole enveloppe toutes les paraboles correspondantes aux différentes valeurs de α.

La parabole de sûreté coupe l'axe des y au point $y_C = \frac{v_0^2}{2g}$ qui correspond au point atteint par un mobile lancé vers le haut avec une vitesse initiale verticale de valeur v_0.