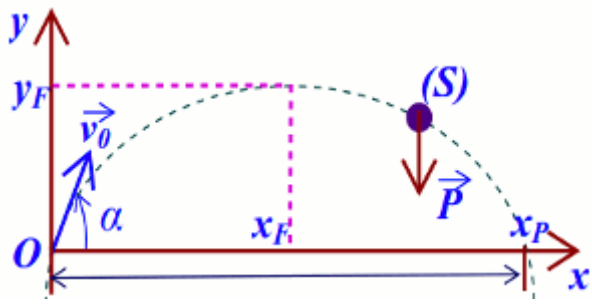
II.1.3 Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur



On se propose d'étudier un coup-franc en football en faisant les hypothèses suivantes:

- l'influence de l'air est négligée
- Le champ de pesanteur est uniforme,

Le joueur tire le coup-franc en communiquant au ballon une vitesse initiale $\vec{v_0}$ dans le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$ qui fait un angle α avec le sol (horizontal)

Déterminer l'équation de la trajectoire du ballon, sa portée et sa flèche.

- le système étudié est le ballon,
- Le référentiel est celui du laboratoire donc galiléen
- La seule force extérieur est son poids.

D'après le TCI:

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g} _(1)$$

Projetons la relation (1) suivant les différents axes de coordonnées: $\vec{a}_G \begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{v} \begin{vmatrix} v_x = v_0\cos(\alpha) \\ v_y = -gt + v_0\sin(\alpha) \\ v_z = 0 \end{vmatrix}$ et

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} x(t) = v_0\cos(\alpha)t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(t) + y_0 \\ z(t) = 0 \end{vmatrix}$$

La balle part du point O(0,0,0) alors x_0=0 et y_0=0. l'équation horaire devient:

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha).\,t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha).\,t \end{cases}$$

De ce système d'équation, nous pouvons déduire l'équation de la trajectoire $t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)}$ et $y = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)})^2 + v_0\sin(\alpha)(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)})$

Ainsi:

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos(\alpha))^2} + x\tan(\alpha)$$

La trajectoire du ballon est une parabole avec la concavité tournée vers le bas.

La portée est le point d'abscisse P(x_p,0) où le ballon touche le sol. Elle est obtenue en résolvant l'équation y=0.

$y_P = -\frac{1}{2}g\frac{x_P^2}{(v_0\cos(\alpha))^2} + x_P\tan(\alpha) = 0 \Rightarrow x_P\,[-\frac{1}{2}g\frac{x_P}{(v_0\cos(\alpha))^2} + \tan(\alpha)] = 0$

On a deux solutions:

$$\begin{cases} x_P = 0 \\ x_P = \frac{v_0^2}{g}2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g} \end{cases}$$

Pour une vitesse $\vec{v}_0$ donnée, la portée est maximale lorsque: $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ **soit** $\alpha = \frac{\pi}{4}$

La portée maximale est dont:

$$x_{p\,max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Pour $x_P \prec x_{P\,max} = \frac{v_0^2}{g}$ l'équation $x_P = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$ admet deux solutions α_1 et α_2 telles que: $2\alpha_1 = 2\alpha$ **et** $\alpha_2 = \pi - 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le ballon. Elle est caractérisée par la point F (x_F, y_F) c'est le point où la vitesse du ballon est nulle.

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_0\cos(\alpha) \\ v_y = -gt + v_0\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = v_0\cos(\alpha).\,t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha).\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = v_0\cos(\alpha)\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \\ y_F = -\frac{1}{2}g(\frac{v_0\sin(\alpha)}{g})^2 + v_0\sin(\alpha)\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \end{cases}$$

$$F\begin{cases} x_F = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g} = \frac{x_P}{2} \\ y_F = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} \end{cases}$$